

**DETYRA NGA OMK 2009**

Prishtinë, më 23 maj 2009

**Detyra 1.** Është dhënë barazimi

$$x^2 - (m + 3)x + m + 2 = 0.$$

Shënojmë me  $x_1$  dhe  $x_2$  rrënjët e këtij barazimi. Gjeni të gjitha vlerat e parametrin  $m$  të tilla që të vlejnjë njëkohësisht dy jobarazimet e mëposhtme:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2}$$

dhe

$$x_1^2 + x_2^2 < 5.$$

**Zgjidhje:** Kemi  $x_1 = m + 2$  dhe  $x_2 = 1$ . Jobarazimi i parë sjell  $\frac{1}{m+2} + 1 > \frac{1}{2}$ , që është ekuivalent me  $m \in (-\infty, -4) \cup (-2, +\infty)$ . Nga jobarazimi i dytë marrim  $m \in (-4, 0)$ .

**Detyra 2.** Vërtetoni se numri  $\sqrt{2}$  është iracional.

**Zgjidhje:** Supozojmë të kundërtën dhe shkruajmë  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , ku  $p$  dhe  $q$  janë numra të plotë (pozitivë) dhe relativisht të thjeshtë. Atëherë gjejmë se  $p^2 = 2q^2$ . Meqëse  $2q^2$  është numër çift, gjejmë se edhe  $p$  është numër çift. Shënojmë  $p = 2p_1$ , ku  $p_1$  është numër natyral. Nga  $p^2 = 2q^2$ , marrim  $2p_1^2 = q^2$ . Si më sipër, konkludojmë se  $q$  është numër çift. Tash, kemi vërtetuar se  $p$  dhe  $q$  plotëpjesëtohen nga numri 2, por kjo bije në kundërshtim me supozimin fillestar se  $p$  dhe  $q$  janë relativisht të thjeshtë. Prandaj, përfundojmë se  $\sqrt{2}$  është numër iracional.

**Detyra 3.** Të vërtetohet se nëse prodhimin e katër numrave natyralë të njëpasnjëshëm u shtohet numri 1, atëherë fitojmë katrorin e një numri të plotë.

**Zgjidhje:** Le të jenë  $n$ ,  $n + 1$ ,  $n + 2$ , dhe  $n + 3$  katër numra natyralë të njëpasnjëshëm. Atëherë gjejmë se

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= n(n+3)(n+1)(n+2) + 1 = \\ &= (n^2 + 3n)(n^2 + 3n + 2) + 1 = (n^2 + 3n)^2 + 2(n^2 + 3n) + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2. \end{aligned}$$

**Detyra 4.** Të zgjidhet ekuacioni me dy të panjohura:

$$x^2 + 2x \cos(x - y) + 1 = 0.$$

**Zgjidhje:** Qartazi  $x = 0$  nuk mund të jetë zgjidhje e këtij ekuacioni, andaj supozojmë se  $x \neq 0$ . Atëherë gjejmë se

$$\cos(x - y) = -\frac{1 + x^2}{2x}.$$

Nga fakti se  $|\cos(x - y)| \leq 1$ , marrim

$$\left| -\frac{1 + x^2}{2x} \right| \leq 1$$

ose

$$1 + x^2 \leq 2|x|.$$

Pabarazimi i fundit ka dy zgjidhje:  $x = -1$  dhe  $x = 1$ . Si rrjedhojë, zgjidhjet e ekuacionit të dhënë janë çiftet

$$(-1, 2k\pi - 1), k \in \mathbb{Z},$$

dhe

$$(1, (2k + 1)\pi + 1), k \in \mathbb{Z}.$$

**Detyra 5.** Le të jetë dhënë  $n \geq 2$  një numër i plotë. Atëherë themi se numri  $n$  është *i thjeshtë* nëse të vetmit numra natyralë që e plotëpjesëtojnë atë janë numrat 1 dhe  $n$ . Vërtetoni se ekzistojnë pafund shumë numra natyralë që janë të thjeshtë.

**Zgjidhje:** Supozojmë të kundërtën, se ekzistojnë vetëm një numër i fundëm numrash të thjeshtë, dhe le të jenë ata numra  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Shqyrtojmë numrin natyral  $d = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ . Vërtetojmë në fillim se ky numër është i thjeshtë. Shihet menjëherë se numri  $d$  nuk plotëpjesëtohet me asnjë nga numrat e thjeshtë  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , dhe meqë çdo numër natyral mund të shkruhet si prodhim i numrave të thjeshtë, konkludojmë se numri  $d$  plotëpjesëtohet vetëm nga 1-shi dhe vetvetja. Me fjalë të tjera, edhe numri  $d$  është i thjeshtë. Meqë  $d$  është i ndryshëm nga  $p_1, \dots, p_n$ , kjo është në kontradiksion me pohimin se vetëm  $p_1, \dots, p_n$  janë të thjeshtë. Si rrjedhim, konkludojmë se ekzistojnë pafund shumë numra natyralë.

**Detyra 6.** Të vërtetohet se numri  $n^{11} - n$  plotëpjesëtohet me numrin 11.

**Zgjidhje:** Shkruajmë

$$n^{11} - n = n(n^{10} - 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1).$$

Nëse numri  $n$  plotëpjesëtohet me 11, atëherë zgjidhja e detyrës është triviale. Nëse  $n$  ka mbetje 1 kur të pjesëtohet me 11, atëherë  $n - 1$  plotëpjesëtohet me 11. Nëse  $n$  ka mbetje 10 kur të pjesëtohet me 11, atëherë  $n + 1$  plotëpjesëtohet me 11. Nëse  $n$  ka mbetje 2 ose 9 kur të pjesëtohet me 11, atëherë  $n^2$  ka mbetje 4,  $n^4$  ka mbetje 5,  $n^6$  ka mbetje 9 dhe  $n^8$  ka mbetje 3, dë d.m.th. se  $n^8 + n^6 + n^4 + n^2 + 1$  plotëpjesëtohet me 11. Ngjashëm shqyrtohen edhe rastet e tjera, kur mbetja e pjesëtimit të numrit  $n$  me 11 është 3, 4, 5, 6, 7 ose 8.

**Detyra 7.** Le të jetë  $p$  një numër i thjeshtë natyral dhe  $n$  një numër i çfarëdoshëm natyral. Sa janë gjithsej numra natyralë ndërmjet 1 dhe  $p^n$ , që janë relativisht të thjeshtë me numrin  $p^n$  (d.m.th. nuk kanë faktor të përbashkët me  $p^n$ , pos numrit 1).

**Zgjidhje:** Të vetmit numra natyralë ndërmjet 1 dhe  $p^n$  të cilët nuk janë relativisht të thjeshtë me  $p^n$  janë numrat  $p, 2p, 3p, \dots, p^{n-1} \cdot p$ . Prandaj numri i kërkuar është  $p^n - p^{n-1}$ .

**Detyra 8.** Le të shënojmë me  $a, b$  dhe  $c$  gjatësitë e brinjëve të një trekëndëshi. Të vërtetohet se për to vlen jobarazimi

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} < 2.$$

**Zgjidhje:** “Secila brinjë e një trekëndëshi është me e shkurtër se shuma e dy brinjëve të tjera.” Pra,  $a < b + c$ , e si rrjedhojë

$$\frac{a}{b+c} = \frac{2a}{(b+c) + (b+c)} < \frac{2a}{a+b+c}.$$

Ngjashëm gjemë

$$\frac{b}{c+a} < \frac{2b}{a+b+c}$$

dhe

$$\frac{c}{a+b} < \frac{2c}{a+b+c}.$$

Nga tri jobarazimet e fituara marrim jobarazimin e kërkuar.

### Detyra 9.

(a) Le të jenë dhënë 3 numra realë  $a_1, a_2, a_3$ . Vërtetoni se vlen jobarazimi:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geq 0.$$

(b) Vërtetoni se jobarazimi i mësipërm nuk vlen medoemos nëse në vend të tre numrave realë marrim vetëm 4 të tillë.

### Zgjidhje:

(a) Pa kufizuar asgjë, le të jenë  $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ . Kemi  $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \geq 0$ ,  $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3) \leq 0$  dhe  $(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \geq 0$ . Meqë vlera absolute e numrit  $(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)$  është jo më e vogël sesa ajo e  $(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)$ , përfundojmë jobarazimi i dhënë është i saktë.

(Mund të vërtetohet, poashtu, se

$$\begin{aligned} & (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) + (a_2 - a_1)(a_2 - a_3) + (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) = \\ & = \frac{1}{2} \left( (a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_3)^2 \right) \geq 0 \end{aligned}$$

(b) Marrim  $a_1 = a_2 = a_3 = 0$  dhe  $a_4 = -1$ .

**Detyra 10.** Në një rreth i fiksojmë katër pika të ndryshme. Le të jetë vendosur në secilën pikë nga një numër real, dhe le të jenë ata numra  $x_1, x_2, x_3, x_4$ , të tillë që  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 > 0$ . Në vijim e përkufizojmë një lojë me këta numra: Nëse ekziston një numër negativ, p.sh.,  $x_i$  atëherë lojtari e bën një hap duke e marrë atë numër, i shton  $x_i$  dy numrave fqinjë, si dhe ia ndryshon shenjën numrit të zgjedhur. Loja mbaron kur të gjithë numrat janë jonegativë. Vërtetoni se kjo lojë detyrimisht mbaron (pas një numri të fundëm hapash).

**Zgjidhje:** Këtu po e shkruajmë vetëm zgjidhjen për rastin kur  $x_1, x_2, x_3, x_4$  janë numra të plotë. Rasti i përgjithshëm nuk është më i vështirë.

Supozojmë, pa humbur asgjë, se numrat  $x_1, x_2, x_3, x_4$  i korrespondojnë pikave të cilat janë të renditura në rreth sipas orientimit pozitiv. Shqyrtojmë funksionin e mëposhtëm:

$$\begin{aligned} R(x_1, x_2, x_3, x_4) = & |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + \\ & + |x_1 + x_2| + |x_2 + x_3| + |x_3 + x_4| + |x_4 + x_1| + \\ & + |x_1 + x_2 + x_3| + |x_2 + x_3 + x_4| + |x_3 + x_4 + x_1| + |x_4 + x_1 + x_2|. \end{aligned}$$

Vërehet lehtë se ky funksion, i cili është rigorozisht pozitiv, zvogëlohet secilën herë kur lojtari luan një hap. Prandaj konkludojmë se loja mbaron pas një numër të fundëm hapash.